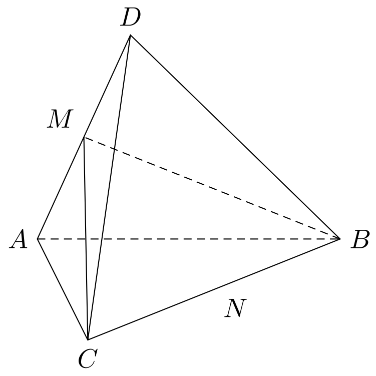
Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et isométries du tétraèdre

Théorème 1. *Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien de dimension 3. Le groupe* $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ *des isométries préservant $\mathcal{T}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*

Démonstration.

On commence par remarquer que $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ induit une permutation des sommets $\{A, B, C, D\}$ de $\mathcal{T}$.
Ceci donne un morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{Isom}(\mathcal{T}) \to \mathfrak{S}_4$.



Soit $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{T})$. Si $\varphi(g) = Id$, alors g préserve les 4 sommets, donc g est l'identité. Ainsi, φ est injectif.
Soit maintenant s la symétrie orthogonale par rapport au plan (BCM). On a alors $\varphi(s) = (AD)$. On peut de la même manière obtenir toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_4$. Puisque les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, on obtient la surjectivité de φ.
Finalement, φ est bijectif, et $\mathcal{T}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. □

Application 2. *La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est :*

$\mathfrak{S}_4$	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	-1	0	1
θ	2	0	2	-1	0

Démonstration.

Les deux premières lignes sont remplies facilement. En effet, le caractère trivial et la signature sont des caractères irréductibles.

On note $\rho : \mathfrak{S}_4 \to \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ la représentation linéaire naturelle de $\mathfrak{S}_4$, qui à $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ associe la matrice de la partie linéaire de l'isométrie correspondante dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note χ le caractère de ρ.

Pour chaque classe de conjugaison, on choisira une base dans laquelle il sera simple de calculer la matrice de σ, donc son caractère. Il y a cinq classes de conjugaison : l'identité, les 6 transpositions, les 3 doubles transpositions, les 8 3-cycles, et les 6 4-cycles.

— Si $\sigma = Id$, alors $\chi(\sigma) = 3$.

— Si σ est une transposition, prenons par exemple $\sigma = (AD)$. C'est la symétrie par rapport au plan (BCM). Dans la base $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})$, la matrice de σ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc $\chi(\sigma) = 1$.

— Si σ est une double transposition, prenons par exemple $\sigma = (AD)(BC)$. C'est la symétrie par rapport à la droite (MN). Dans la base $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{NB})$, la matrice de σ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc $\chi(\sigma) = -1$.

— Si σ est un 3-cycle, prenons par exemple $\sigma = (BCD)$. C'est la rotation d'axe (AG), où G est le centre de gravité du triangle équilatéral BCD. La matrice de σ est donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. On a donc $\chi(\sigma) = 1 + 2\cos\alpha = 0$.

— Si σ est un 4-cycle, prenons par exemple $\sigma = (ABCD)$. Si on note O le centre du tétraèdre $\mathcal{T}$, on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$. Dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, la matrice de σ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc $\chi(\sigma) = -1$.

Enfin, χ est irréductible, puisque :

$$\langle \chi, \chi \rangle = (\chi|\chi) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|} \left(1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 3 \times (-1)^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2\right) = \frac{24}{24} = 1$$

Ainsi χ est irréductible, et on peut l'ajouter à la table de caractère.

Par le même argument, on vérifie que $\varepsilon\chi$ est un caractère irréductible que l'on peut ajouter à la table de caractères. En notant θ le dernier caractère irréductible, on a $24 = 1 + 1 + 3^2 + 3^2 + \theta(Id)^2$, donc $\theta(Id) = 2$. On complète alors la dernière ligne par orthogonalité des colonnes. On trouve ainsi la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$. $\square$

Références

[Ser70] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann